

## 数学的モデルによる「多数決」の解析

三浦 章

### 目次

1. はじめに
2. モデル
3. 正答率の解析的導出
4. 考察
5. おわりに

### 1. はじめに

多数決とは集団において意思決定を図る際に、多数派の意見を採用する方法であり、今日の議会、最高裁判所の表決等に広く取り入れられている。本原理が意思決定に有効な方法であることは古くから知られており、古代ギリシャ・ローマにおける民会の議決方法、古代ギリシャの陶片追放、コンクラーヴェ（ローマ教皇の選挙）等にも実現例を見ることが出来る。

集団による意思決定に関連しては、「三人寄れば文殊の知恵」という肯定的なものがあるものの反面、「三人寄っても下種は下種」、「船頭多くして船山にのぼる」というものもあり、本原理には危険も孕んでいることが認識されていたことが分かる。特に「全員一致の審決は無効とする」という定めを設けた例もある[1]。

情報処理分野では、冗長化技術に基づく耐故障化設計のアプローチの一つとして、多数決原理が適用されている[2]。また近年では、女流名人と対戦し勝利した将棋ソフト「あから」の制御[3][4]に多数決原理が用いられ、大きな成果が得られたこと等、多数決原理が意思決定に有効であることが実証されている [5][6]。

本稿では、多数決原理を数学的にモデル化することで、個々人の判断能力と、集団としての判断の正確さの相関に関する、定量的解析を実施する。さらに、本モデルをベースに、集団としての正答率を高めるための具体的方策を議論する。

## 2. モデル

モデルには、以下の仮定を設ける。

- ① 意思決定の対象に対し個人は賛成もしくは反対の意思表示のみが可能である。
- ② 集団における決定は単純過半数の多数決で行う。すなわち、 $(2n + 1)$  人の集団では、 $(n + 1)$  人の賛成で決定がなされる。
- ③ 個人の判断は他人の判断に影響されない。
- ④ 個人の正答率は一様に、 $p(0 \leq p \leq 1)$  である。

この下で、多数決により、集団として正しい判断がなされる確率、すなわち集団としての正答率を求める。

## 3. 正答率の解析的導出

多数決における、集団としての正答率を  $f_n(p)$  とすると、 $(2n + 1)$  人中の  $(n + 1)$  人以上が正答する確率であるので、(3.1)で与えられる。

$$f_n(p) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} p^k (1-p)^{2n+1-k} \quad (3.1)$$

$f_n(p)$  の形状を検討する上で、主要な性質は次のとおりである。

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 1 \quad (3.2)$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$f_n(p) \text{ は、点 } \left(\frac{1}{2}, f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ に対して点対称} \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dp} f_n(p) = (2n+1) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} f_n(p) = n(2n+1) \binom{2n}{n} (1-2p)p^{n-1}(1-p)^{n-1} \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dp} f_n\left(\frac{1}{2}\right) = O(n^{1/2}) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(p) &\leq f_n(p) & 0 \leq p \leq 1/2 \\ f_{n+1}(p) &\geq f_n(p) & 1/2 \leq p \leq 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

以下に, (3.3), (3.4), (3.5), (3.7), (3.8)の導出過程を述べる.

(3.3) の導出

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \end{aligned}$$

ここで,  $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$  であるから

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{2} \times \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} \right\}$$

さらに,  $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$  より

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} (1+1)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3.4)の導出 :  $\left(\frac{1}{2}-\alpha, f_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right)$  と  $\left(\frac{1}{2}+\alpha, f_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)$  の中点が  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  であることを示す.

$$f_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^k \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{2n+1-k}$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^k \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{2n+1-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^k \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^{2n+1-k} \\
&= \sum_{m=0}^n \binom{2n+1}{m} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^{2n+1-m} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^m
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&f_n\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + f_n\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^k \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^{2n+1-k} + \sum_{m=0}^n \binom{2n+1}{m} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^{2n+1-m} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^m \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^k \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^{2n+1-k} \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \right\}^{2n+1} = 1
\end{aligned}$$

(3.5)の導出

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} f_n(p) &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} k p^{k-1} (1-p)^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) p^k (1-p)^{2n-k} \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (k+1) p^k (1-p)^{2n-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) p^k (1-p)^{2n-k} \\
&= \binom{2n+1}{n+1} (n+1) p^n (1-p)^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} (k+1) p^k (1-p)^{2n-k} \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) p^k (1-p)^{2n-k} \\
&= (2n+1) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1) \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1) \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} = (2n+1) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n
\end{aligned}$$

(3.7)の導出: (3.5)にスターリングの公式  $n! \approx \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$  を適用することにより, 導出される.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} f_n(p) &= (2n+1) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \\ &\approx (2n+1) \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2} p^n (1-p)^n \\ &= \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} p^n (1-p)^n \\ \therefore \frac{d}{dp} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &\approx \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} = O(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

(3.8)の導出:  $g_n(p) = f_{n+1}(p) - f_n(p)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} g_n(p) &= \frac{d}{dp} (f_{n+1}(p) - f_n(p)) \\ &= (2n+3) \binom{2n+2}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1} - (2n+1) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \\ &= (2n+3) \binom{2n+2}{n+1} p^n (1-p)^n \left\{ p(1-p) - \frac{(2n+1) \binom{2n}{n}}{(2n+3) \binom{2n+2}{n+1}} \right\} \\ &= (2n+3) \binom{2n+2}{n+1} p^n (1-p)^n \left\{ p(1-p) - \frac{n+1}{2(2n+3)} \right\} \\ &= -(2n+3) \binom{2n+2}{n+1} p^n (1-p)^n \left\{ \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4(2n+3)} \right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9)の{ }内を $h(p)$ とおくと,  $h(p)$ は $p$ の二次式で, かつ,  $h(p) > 0$ ,  $h(1/2) < 0$ ,  $h(1) > 0$ であるから, 中間値の定理により,  $h(p) = 0$ は, 2実根 $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < 1/2 < \beta < 1$ )を持つ.

$$\frac{d}{dp} g_n(p) = -(2n+3) \binom{2n+2}{n+1} p^n (\alpha - p)(\beta - p)(1-p)^n$$

これから,  $g_n(p)$  に関し, 次の増減表が得られ, グラフの形状が定まる.

	0		$\alpha$		1/2		$\beta$		1
$\frac{d}{dp}g_n(p)$	0	-	0	+	+	+	0	-	0
$g_n(p)$	0	↓	→	↑	1/2	↑	→	↓	1

(3.2)~(3.6)より,  $f_n(p)$  は,  $p = 0$ を零点とし,  $0 \leq p \leq 1$  で単調増加,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  に関して点対称,  $p = 1/2$  を変曲点,  $0 \leq p < 1/2$  で下に凸,  $1/2 < p \leq 1$ で上に凸, なグラフであることが分かる. (3.8)より,  $0 \leq p \leq 1/2$ では,  $f_n(p)$  は $n$ の増加に対し単調減少し,  $1/2 \leq p \leq 1$ では,  $f_n(p)$  は $n$ の増加に対し単調増加することが示された.

## 4. 考察

### 4.1. 個人の正答率と集団の正答率の関連

人数を固定した場合, 正答率を変動させると次のことが分かる.

- ① 正しい判断をすることが多い (正答率が  $1/2$  以上) 個人から成り立つ集団の正答率は, 個人の正答率より高くなる.
- ② 常に正しい判断をする (正答率 1) 個人からのみ成り立つ集団は, 常に正しい判断をする (正答率 1) .
- ③ 当たるも八卦当たらぬも八卦 (正答率  $1/2$ ) の個人からのみ成り立つ集団は, 当たるも八卦当たらぬも八卦の判断をする.
- ④ ①②は正しい→誤った, 以上→以下, 高く→低く に置き換えたものも成り立つ.

集団の人数が 5 名の場合を図 4.1 に示す.

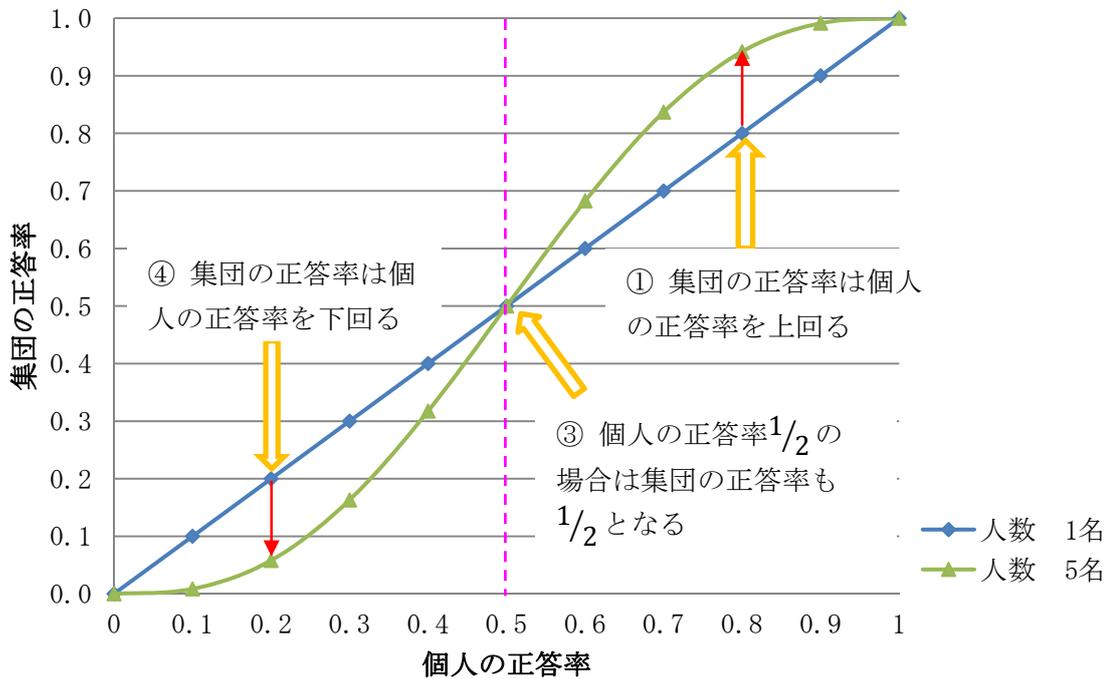


図 4.1 個人と集団の正答率の関係

#### 4.2. 集団の大きさと集団の正答率の関連

集団の大きさを変動させると以下のことが分かる。

① 人数の異なる集団を比較すると、正しい判断をすることが多い（正答率が $1/2$ 以上）個人が大勢いる集団の正答率は、少ない人数の集団に比べて正答率は高くなる。

② 式(5)  $\frac{d}{dp} f_n(1/2) \approx \sqrt{n}$ より、 $n$ が大きければ $p = 1/2$ の近傍では、 $p$ の増加につれて $f_n(p)$ は $n$ に比例して急速に増加することが分る。実際に、個人が正解率0.6の場合でも、多数決での正解率は、49名の集団では、 $f_{24}(0.6) \approx 0.9224$ に、99名の集団では、 $f_{49}(0.6) \approx 0.9781$ に、上昇する。

③ ①は正しい→誤った、以上→以下、高く→低く に置き換えたものも成り立つ。

集団の大きさ（人数）を1, 3, 5, 7, 9, 11名と変動させた場合の集団の正答率を図4.2に示す。集団が大きくなるにつれて、個人の正解率が同じでも集団の正解率が増加し、多数決が優れた決定方法であることを示している。

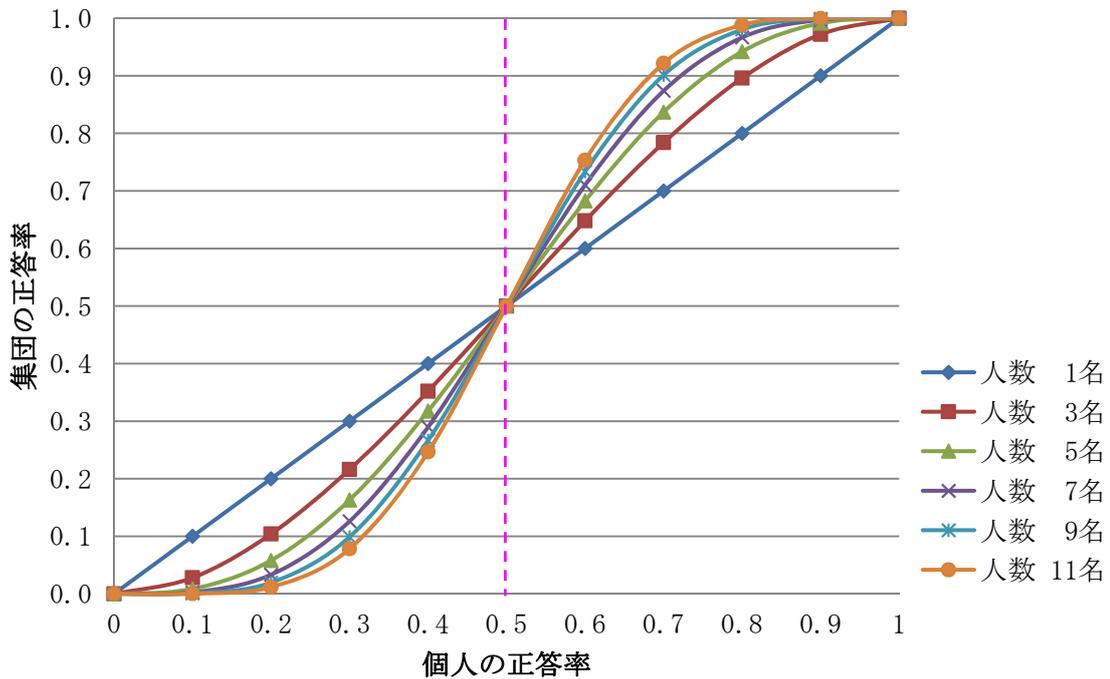


図 4.2 集団の大きさと正答率の関連

### 4.3. 集団の正答率を増す方策

4.1 および 4.2 から、正答率を増す方策として、以下の 2 つが考えられる。

(方策 1) 4.1 ①を踏まえ、個人の資質を向上させ、個人がより正しい判断をできるようにする。

(方策 2) 4.2 ①を踏まえ、集団構成人員（正しい判断のできる個人）数を増やす。

(方策 1) は各種教育や啓蒙による対処であり、(方策 2) は意思決定に関わる対象層を増やすことに対応する。これを踏まえると、現実社会においては (方策 1) を行いつつ、制度見直しによる (方策 2) を行うことが有効であるといえよう。

## 5. おわりに

本稿では、多数決原理の有効性について数学的な背景を明らかにし、集団の構成員の正解率が  $1/2$  以上であると、単純過半数の場合、構成員数が多いほど集団としての正解率が向上することを解析的に示した。

今後は、実際の多数決利用シーンを想定し、棄権者が存在する場合、投票がリーダの影響を受ける場合、集団内に複数の正解率のグループが存在する場合、3 分岐以上の決定が求められる場合、単純過半数でない場合（たとえば日本国憲法改正発議等に適用される特別多数）等についての検討を進める。解析的に取り扱えないことが想定されるため、数値解析や、マルチエージェントシミュレーション等の活用も考慮する。

## 参考文献

- [1] 日本人とユダヤ人, イザヤ・ペンダサン著, 角川文庫, pp.96-109
- [2] 電子情報通信学会 知識ベース 知識の森 [http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc\\_256.html](http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc_256.html)  
6群(コンピュータ - 基礎理論とハードウェア), 7編(ディペンダブルコンピューティング),  
1章ディペンダブルコンピューティングの基礎〈ver.1/2010.3.11〉, pp.6-7
- [3] 伊藤毅志: 合議アルゴリズム「文殊」, 情報処理, vol.50, No.9, pp.887-894, (Sep.2009)
- [4] 伊藤毅志: コンピュータ将棋における合議アルゴリズム, 人工知能学会誌, 26巻5号, pp.525-530, (2011.9)
- [5] 瀧澤武信: ゲーム情報学 5.将棋, 情報処理, vol.53, No.2, pp.126-132, (Feb.2012)
- [6] 保木那仁他: あから 2010 のシステム設計と操作概要, 情報処理, vol.52, No.2, pp.162-169, (Feb.2011)